

Physikalische Analyse zur Bestimmung von Kriterien für die Auslegung und Optimierung von ober- und unterschlächtigen Wasserrädern

Dipl.-Phys. Dr.-Ing. Klaus Brinkmann



Lehrgebiet Elektrische Energietechnik

Feithstraße 140, Philipp-Reis-Gebäude, D-58084 Hagen, fax: +49/2331/987 357,

e-mail: klaus.brinkmann@fernuni-hagen.de

Einleitung:

Für eine dezentrale Nutzung von Wasserkraft im unteren Leistungsbereich stellen Wasserräder immer noch eine durchaus brauchbare Möglichkeit zur Energiewandlung dar. Obwohl solchen Anlagen einen Hauch von Nostalgie anhaftet, begegnet man ihnen immer wieder, da Turbinen eine Leistungsgrenze besitzen, unterhalb derer ein wirtschaftlicher Betrieb kaum möglich ist. Insbesondere bei Teillast zeichnen sich Wasserräder im Wirkungsgradverhalten aus /1/.

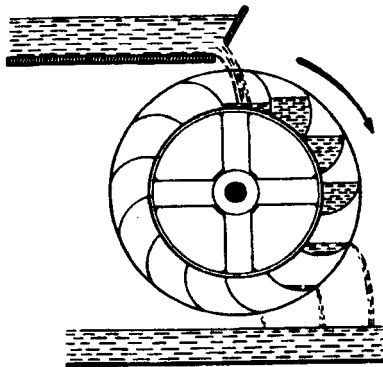


Abb. 1 Oberschlächtiges Wasserrad

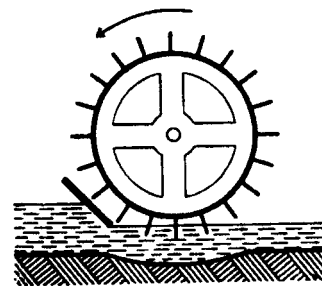


Abb. 2 Unterschlächtiges Wasserrad

In den deutschen Mittelgebirgen findet man heute noch Tausende von Möglichkeiten einer derartigen Nutzung von Wasserkraft. Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage nach den Auslegungskriterien von Wasserrädern aus heutigem Blickwinkel. Die heute noch verfügbare Literatur über Wasserräder ist sehr spärlich. Eingehende analytische Betrachtungen, sowohl hydraulisch als auch konstruktiv, nach heutigen Standards sind, falls überhaupt, schwer zu finden. Statt systematischer Darstellungen und Ableitungen der Auslegungskriterien findet man eher empirische Formeln, die praktische Erfahrungen damaliger Konstruktionen berücksichtigen, bzw. Abschätzungen für spezielle Wasserradformen- und -größen /1/, /2/.

Aus diesem Grund ist es sinnvoll, eine physikalisch-mathematische Analyse vorzunehmen, mit dem Ziel, praktische konstruktive Anleitungen zum Bau von Wasserrädern zu erschließen. Damit soll ein brauchbarer Ansatz zur Bereitstellung und weiteren Verfeinerung moderner Konstruktionsgrundlagen für ober- und unterschlächtige Wasserräder geschaffen werden.

Unterschlächtiges Wasserrad:

Sei \dot{m} [kg/s] die in der Zeiteinheit auf die wirksame Schaufel-Fläche A [m²] zuströmende Wassermenge mit der Fließgeschwindigkeit v_0 [m/s], dann resultiert daraus eine Kraft von $F_0 = \rho \cdot A \cdot v_0^2$, mit ρ [kg/m³] der Dichte des Wassers. Bei einer Umfangsgeschwindigkeit des Wasserrades von $u = \Omega \cdot R$ [m/s], mit der Winkelgeschwindigkeit Ω [1/s] und dem wirksamen Wasserrad-Radius R [m], beträgt die Relativgeschwindigkeit v_{rel} [m/s] des Wassers zum Rad $v_{rel} = v_0 - \Omega \cdot R$. Damit wirkt auf das rotierende Rad die Kraft $F = F_0 \cdot (1 - \Omega \cdot R / v_0)^2$. Mit der Beziehung für die Leistung $P = M \cdot \Omega$ [Nm/s], mit dem Drehmoment $M = F \cdot R$ [Nm], erhält man $P = F_0 \cdot v_0 \cdot (1 - \Omega \cdot R / v_0)^2 \cdot \Omega \cdot R / v_0$. Diese Leistung hat ein Maximum für $\Omega \cdot R = v_0 / 3$, mit $P_{opt} = 4 / 27 \cdot \rho \cdot A \cdot v_0^3$. Berücksichtigt man die auftretenden hydraulischen h_{hyd} und mechanischen h_{mech} Verluste, so läßt sich folgende maximale Leistung gewinnen:

$$P_{max} = h_{hyd} \cdot h_{mech} \cdot \frac{4}{27} \cdot \rho \cdot A \cdot v_0^3. \quad (1)$$

Für die Ableitung eines Ausdrucks zur Abschätzung des Anlaufverhaltens betrachte die Kräftebilanz $F_{res} = \frac{M_{res}}{R} = \frac{\Theta_{Rad}}{R} \cdot \frac{d\omega}{dt} = F_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega \cdot R}{v_0}\right)^2 - F_W$ (*), mit dem Trägheitsmoment

$\Theta_{Rad} = \int r^2 dm$, sowie $F_W = F_R + F_L$, $F_L = \frac{M_L}{R}$ als Widerstandskraft (Reibung + Last).

Im erreichten stationären Zustand gilt $d\omega = 0$ und damit $F_{res} = 0$, woraus sich die folgende resultierende Winkelgeschwindigkeit ergibt:

$$\Omega_w = \frac{v_0}{R} \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{F_W}{F_0}}\right] \quad (2)$$

Die für eine maximale Leistung erforderliche Drehzahl wird erreicht, wenn $F_W = 4 / 9 \cdot F_0$ gilt.

Für die Herleitung der Anlauf-Funktion $\Omega(t)$, ist die Bewegungsgleichung (*) zu integrieren.

Aus der Bewegungsgleichung folgt:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{F_0 \cdot R}{\Theta_{Rad}} \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{w} \cdot R}{v_0}\right)^2 - \frac{F_W \cdot R}{\Theta_{Rad}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\Omega} \frac{d\mathbf{w}}{\left(1 - \frac{\mathbf{w} \cdot R}{v_0}\right)^2 - \frac{F_W}{F_0}} = \frac{F_0 \cdot R}{\Theta_{Rad}} \int_0^t dt \quad ; \quad \text{mit der}$$

$$\text{Substitution } z \equiv \left(1 - \frac{\mathbf{w} \cdot R}{v_0}\right) \Rightarrow \int_1^{1 - \frac{\mathbf{w} \cdot R}{v_0}} \frac{dz}{\frac{F_W}{F_0} - z^2} = \frac{F_0 \cdot R^2}{v_0 \cdot \Theta_{Rad}} \cdot t. \quad \text{Mit } \sqrt{\frac{F_W}{F_0}} < z \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{F_0}{F_W}} \cdot \left[\text{Arcth} \left(\sqrt{\frac{F_0}{F_W}} \left(1 - \frac{\Omega \cdot R}{v_0}\right) \right) - \text{Arcth} \left(\sqrt{\frac{F_0}{F_W}} \right) \right] = \frac{F_0 \cdot R^2}{v_0 \cdot \Theta_{Rad}} \cdot t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\Omega(t) = \frac{v_0}{R} \cdot \left\{ 1 - \sqrt{\frac{F_W}{F_0}} \cdot \text{cth} \left[\sqrt{\frac{F_W}{F_0}} \cdot \frac{F_0 \cdot R^2}{v_0 \cdot \Theta_{Rad}} \cdot t + \text{Arcth} \left(\sqrt{\frac{F_0}{F_W}} \right) \right] \right\}}. \quad (3)$$

Wie man sieht, gilt dabei $\Omega(t=0) = 0$ und $\Omega(t \rightarrow \infty) = \Omega_w$. D.h. es dauert theoretisch unendlich lange, bis ein stationärer Zustand erreicht wird. Um ein Kriterium für die praktisch zu erwartende Zeit zu erhalten, betrachte die Anlaufzeit-Funktion als Umkehrung von (3):

$$\boxed{t = \frac{v_0 \cdot \Theta_{Rad}}{F_0 \cdot R^2} \cdot \sqrt{\frac{F_0}{F_W}} \cdot \left[\text{Arcth} \left(\sqrt{\frac{F_0}{F_W}} \cdot \left(1 - \frac{\Omega \cdot R}{v_0}\right) \right) - \text{Arcth} \left(\sqrt{\frac{F_0}{F_W}} \right) \right]}. \quad (4)$$

Zur Abschätzung der Hochlaufzeit nutze die Bedingung für eine maximale Leistung P_{\max}

$$\sqrt{\frac{F_W}{F_0}} = \frac{2}{3} \quad \text{und setze für die Frequenz } \Omega = 0,9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{v_0}{R} = 0,9 \cdot \Omega_{P_{\max}} \quad \text{d.h. 90\% der Grenz-}$$

frequenz für $t \rightarrow \infty$. Damit erhält man ein Maß für die Anlaufzeit in Abhängigkeit von den Strömungsdaten und Konstruktionsfaktoren:

$$\boxed{t_{\text{Anlauf}}(90\% \Omega_{P_{\max}}) \cong 1,58 \cdot \frac{v_0 \cdot \Theta_{Rad}}{F_0 \cdot R^2}} \quad (5)$$

Diese Beziehung kann zur Abstimmung des zu konstruierenden unterschlächtigen Wasserrades (R, Θ) auf die Strömungsverhältnisse (v_0, F_0) genutzt werden.

Oberschlächtiges Wasserrad:

Sei $v_0 = \mathbf{x} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ [m/s] die Fließgeschwindigkeit nach dem Schütz auf das Rad, mit der Höhendifferenz h [m] vom Ausfluß zur Wasseroberfläche, g [m/s²] die Erdbeschleunigung.

Der Faktor $0 < \mathbf{x} \leq 1$ berücksichtigt dabei die Reibungseffekte beim Austritt. Mit L und B [m], als Länge und Breite der Schützöffnung, läßt sich der Massenstrom in der folgenden Form angeben: $\dot{m} = \mathbf{r} \cdot L \cdot B \cdot \mathbf{x} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ [kg/s]; bzw. als Volumenfluß $Q = \dot{m} / \mathbf{r}$ [m³/s]. Für die Umfangsgeschwindigkeit des Rades sollte $u \leq v_0$ gelten.

Das Rad sei mit z Zellen mit einem Zellvolumen von V_z [m³] bestückt. Somit transportiert das rotierende Rad im gleichmäßigen Mittel ein befüllbares Volumen von $\dot{V} = z \cdot V_z / (2\mathbf{p}) \cdot \Omega$, welches gleich dem maximal beförderbaren Wasserstrom Q_{\max} ist. Allgemeiner gilt $Q = z \cdot \mathbf{e} \cdot V_z / (2\mathbf{p}) \cdot \Omega$ mit dem Füllfaktor $0 \leq \mathbf{e} \leq 1$. Damit erhält man:

$$\frac{u}{v_0} = \frac{2\mathbf{p} \cdot R \cdot L \cdot B}{z \cdot \mathbf{e} \cdot V_z} \quad \text{und} \quad \Omega = \frac{2\mathbf{p} \cdot L \cdot B}{z \cdot \mathbf{e} \cdot V_z} \cdot v_0. \quad (6)$$

Dies entspricht der Situation nach dem Anfahrvorgang, dem erreichten stationären Zustand.

Während des Anfahrprozesses muß gegen das Lastmoment die Rotationsenergie für das Rad aufgebracht werden, wobei zusätzlich noch Reibungskräfte zu überwinden sind. Zur Abschätzung des Anfahrverhaltens, sei davon ausgegangen, daß das ruhende Rad mit der Masse m gefüllt wird, gleichmäßig verteilt über den Winkel $\Phi = \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1$, wie in Abb. 3 gezeigt.

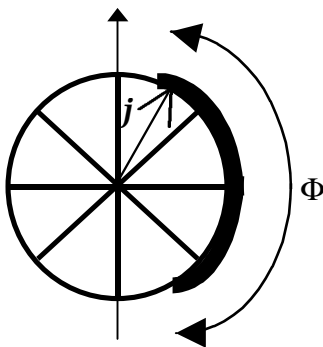


Abb. 3

$$\text{gleichmäßige Verteilung} \Rightarrow \frac{m}{\Phi} = \frac{dm}{dj}$$

$$\begin{aligned} \text{Für das Antriebsmoment gilt: } dM &= g \cdot dm \cdot R \cdot \sin j \\ \Rightarrow M &= \frac{g \cdot R \cdot m}{\Phi} \int_{j_1}^{j_2} \sin j \cdot dj = m \cdot g \cdot R \cdot \frac{\cos j_1 - \cos j_2}{\Phi}. \end{aligned}$$

Völlig analog findet man für die potentielle Energie:

$$E_p = m \cdot g \cdot R \left(\int_{j_1}^{j_2} \frac{\cos j}{\Phi} \cdot dj - \cos j_2 \right).$$

Diese potentielle Energie versetzt das Rad dann in Folge in Rotation.

Mit der Reibungsarbeit $E_R = \mathbf{m}_R \cdot (M_{Rad} + m) \cdot g \cdot \mathbf{j} \cdot R_W$ an der Welle mit dem Radius R_W und $\Phi = \int \mathbf{w} \cdot dt$, folgt dann für die Energiebilanz:

$$m \cdot g \cdot R \cdot \left(\frac{\sin j_1 - \sin j_2}{\Phi} - \cos j_2 \right) = \frac{1}{2} \cdot (\Theta_{Rad} + m \cdot R^2) \cdot \Omega^2 + \mathbf{m}_R \cdot (M_{Rad} + m) \cdot g \cdot R_W \cdot \mathbf{j}. \quad (7)$$

Nach dem Überstreichen des Winkels Φ ergibt sich somit nach der Energiewandlung eine

$$\text{Anfahrfrequenz von } \Omega = \Omega_{Anf} \equiv \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot R \cdot \left(\frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}{\Phi} - \cos \varphi_2 \right) - \mu_R \cdot M_{ges} \cdot g \cdot R_W \cdot \Phi}{\frac{1}{2} (\Theta_{Rad} + m \cdot R^2)}},$$

womit sich näherungsweise eine Anfahrzeit aus dem Stillstand von $t_{Anlauf} \approx \frac{2 \cdot \Phi}{\Omega_{Anf}}$ ergibt.

Die sich ergebende Drehzahl im stationären Zustand ergibt sich aus der Leistungsbilanz zu:

$$\Omega = -\frac{\mathbf{m}_R \cdot M_{ges} \cdot g \cdot R_W}{\dot{m}} + \sqrt{\left(\frac{\mathbf{m}_R \cdot M_{ges} \cdot g \cdot R_W}{\dot{m} \cdot R^2} \right)^2 + \frac{2 \cdot g}{R} \cdot \left(\frac{\sin \mathbf{j}_1 - \sin \mathbf{j}_2}{\Phi} - \cos \mathbf{j}_2 \right)}. \quad (8)$$

Die maximal mögliche Drehzahl ergibt sich aus der obigen Formel durch Einsetzen von $\mathbf{m}_R = 0$. In Kombination mit der Gleichung (6) erhält man hiermit eine Beziehung, die es erlaubt, maschinenbauliche Gegebenheiten an die Strömungsbedingungen anzupassen bzw. zu optimieren.

Abgesehen von zusätzlich auftretenden hydraulischen Verlusten, gilt dann für das resultierende Lastmoment M_L sowie für die verfügbare Leistung:

$$P_{mech} = M_L \cdot \Omega = \frac{1}{2} \cdot \dot{m} \cdot R^2 \cdot \Omega^2 = \dot{m} \cdot g \cdot R \cdot \left(\frac{\sin \mathbf{j}_1 - \sin \mathbf{j}_2}{\Phi} - \cos \mathbf{j}_2 \right) - \mathbf{m}_R \cdot M_{ges} \cdot g \cdot R_W \cdot \Omega. \quad (9)$$

Zusammenfassung und Ausblick:

Eine intensive Nutzung regenerativer Energieträger erfordert, aufgrund der zeitlich und lokal schwankenden Verfügbarkeit, eine dezentrale Versorgungsstruktur. Dabei müssen sich die verschiedenen Nutzungsmöglichkeiten regenerativer Energien kombinatorisch in Form von *Hybridsystemen* ergänzen. Eine dieser Möglichkeiten stellt die Nutzung von Wasserkraft in Form von Wasserrädern dar. Die vorliegende Arbeit dient zur systematischen Erfassung der theoretischen Grundlagen, für deren Auslegung und Optimierung.

Referenzen:

/1/ *Bau von Wasserkraftanlagen*

Felix von König; Verlag C.F. Müller Karlsruhe 1985

/2/ *Die Wasserräder*

Wilhelm Müller; Verlag Moritz Schäfer Detmold 1983

Reprint der Ausgabe von 1939