Physikalische Analyse zur Bestimmung von Kriterien für die Auslegung und Optimierung von mittelschlächtigen Wasserrädern

Dipl.-Phys. Dr.-Ing. Klaus Brinkmann

FernUniversität
Gesamthochschule in Hagen

Lehrgebiet Elektrische Energietechnik
Feithstraße 140, Philipp-Reis-Gebäude, D-58084 Hagen, fax: +49/2331/987 357,
e-mail: klaus.brinkmann@fernuni-hagen.de

Einleitung:

Für eine dezentrale Nutzung von Wasserkraft im unteren Leistungsbereich stellen Wasserräder eine immer noch durchaus sinnvolle, womöglich vorteilhafte Möglichkeit zur Energiewandlung dar. Für kleinste Leistungen setzt man heute wie vor einigen tausend Jahren Wasserräder ein. Wasserräder wurden früher für Sägewerke, Schmiedehämmer und Öl- oder Getreidemühlen genutzt, während sie in unserer Zeit üblicherweise zur Erzeugung elektrischer Energie dienen. Obwohl solche Anlagen einen Hauch von Nostalgie haben, begegnet man ihnen immer wieder. Insbesondere bei Teillast zeichnen sich Wasserräder im Wirkungsgradverhalten aus /1/, /3/. In den deutschen Mittelgebirgen findet man heute noch Tausende von Möglichkeiten einer derartigen Nutzung von Wasserkraft.

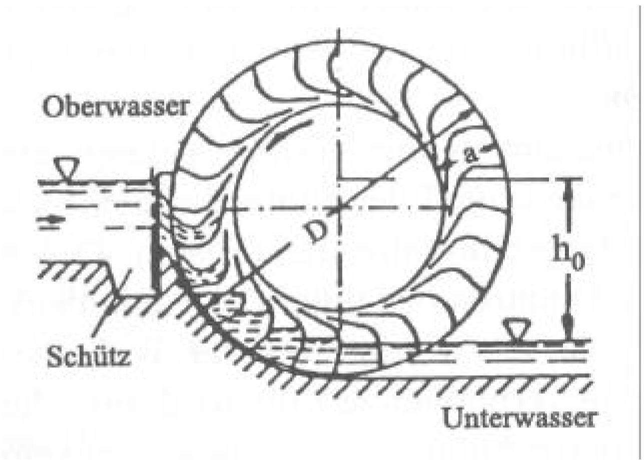

Abb. 1 Mittelschlächtiges Wasserrad /3/

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage nach den Auslegungskriterien von Wasserrädern aus heutigem Blickwinkel. Die heute noch verfügbare Literatur über Wasserräder ist sehr spärlich. Eingehende analytische Betrachtungen, sowohl hydraulisch als auch konstruktiv, nach heutigen Standards sind, falls überhaupt, schwer zu finden.

Statt systematischer Darstellungen und Ableitungen der Auslegungskriterien findet man eher empirische Formeln, die praktische Erfahrungen damaliger Konstruktionen berücksichtigen, bzw. Abschätzungen für spezielle Wasserradformen- und größen /1/, /2/, /3/. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, eine physikalisch-mathematische Analyse vorzunehmen, mit dem Ziel, eine systematische Abhandlung der Kriterien zur Auslegung (und damit auch zur Optimierung) von Wasserrädern in moderner Fassung zu erhalten. ***Ziel dieses Beitrages*** ist es**,** die grundlegenden Herleitungen der Auslegungskritrien für <u>mittelschlächtige Wasserräder</u> darzulegen, ergänzend und analog zu den bereits im letzten Jahr präsentierten Ausführungen zum unter- und oberschlächtigen Wasserrad /4/. Damit werden grundlegende praktische konstruktive Anleitungen zum Bau von Wasserrädern erschlossen. Es wird also vervollständigend ebenfalls ein brauchbarer Ansatz zur Bereitstellung und weiteren Verfeinerung moderner Konstruktionsgrundlagen von mittelschlächtigen Wasserrädern geschaffen.

<u>Mittelschlächtiges Wasserrad:</u>

Das mittelschlächtige Wasserrad (Abb. 1) stellt eine Kombination zwischen unter- und oberschlächtigem Prinzip dar, wobei der Übergang zum Niedergefällerad fließend ist /1/, /2/. Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, die Wirkung des Wassers auf das mittelschlächige Rad physikalisch als Überlagerung eines rein unter- und oberschlächtigen Anteils, gemäß der Darstellung in Abb. 2, zu zerlegen (Gewichts- + Strömungsanteil).

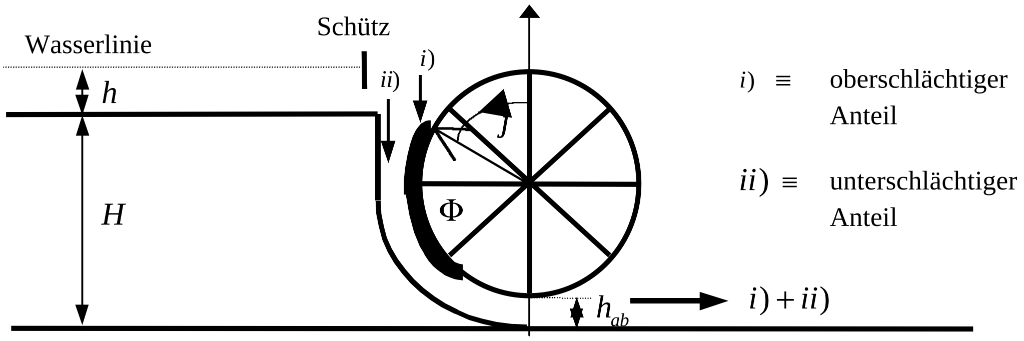

Abb 2. geometrische Zuordnungen

Von der Grundlinie aus betrachtet, sei die Höhe des Wasserspiegels $H_{ab} \equiv H + h \ [m]$, so dass bei fehlender Energieentnahme durch das Wasserrad für die Abflußgeschwindigkeit $v_{ab,0}$ gilt:

$$v_{ab,0} = \xi_{ab} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{ab}} \ \ [m/s] \ \ \text{mit} \ \ 0 < \xi_{ab} \leq 1 . \qquad (1)$$

Die Fließgeschwindigkeit nach dem Schütz auf das Rad sei analog $v_0 = \xi_S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ $[m/s]$, mit der Höhendifferenz h $[m]$ vom Ausfluß zur Wasseroberfläche, g $\left[m/s^2\right]$ die Erdbeschleunigung. Mit L und B $[m]$, als Länge und Breite der Schützöffnung, gilt für den Massenstrom $\dot{m} = \rho \cdot L \cdot B \cdot \xi_S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ $[kg/s]$; bzw. als Volumenfluß $Q = \dot{m} / r$ $\left[m^3/s\right]$. Die Faktoren ξ_S und ξ_{ab} berücksichtigen dabei die Reibungseffekte.

Zur ***Abschätzung des Anfahrverhaltens***, sei davon ausgegangen, daß das ruhende Rad mit der Masse $m_{i)}$ gefüllt wird, gleichmäßig verteilt über den Winkel Φ, wie in Abb. 2 gezeigt.

Für die Größe der Winkel φ_1 und φ_2 kann die folgende Abschätzung gegeben werden:

$$\varphi_1 \approx \arccos\left(\frac{H - h_{ab}}{R} - 1\right),\ \varphi_2 < 180°, \tag{2}$$

mit dem wirksamen Wasserrad-Radius $R\,[m]$. Aus der Annahme einer gleichmäßigen Massebelag-Verteilung $\Rightarrow$ $\frac{m_{i)}}{\Phi} = \frac{dm_{i)}}{d\varphi}$. Für das Antriebsmoment $M_{i)}$ und die Kraft $F_{i)}$ gilt:

$$M_{i)} = \frac{g \cdot R \cdot m_{i)}}{\Phi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi \cdot d\varphi = m_{i)} \cdot g \cdot R \cdot \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\Phi}\ [Nm] \Rightarrow F_{i)} = \frac{M_{i)}}{R}\ [N]. \tag{3}$$

Besteht aufgrund der Bauweise des Wasserrades das Antriebsmoment nur aus diesem Gewichtsanteil $i)$, so sind die Formeln in /4/ für das oberschlächtige Wasserrad anzusetzen.

Sei $\dot{m}_{ii)}$ $[kg/s]$ die in der Zeiteinheit auf die wirksame Schaufel-Fläche $A\left[m^2\right]$ zuströmende Wassermenge mit der Fließgeschwindigkeit $v_{ab,0}\,[m/s]$, dann resultiert daraus eine Kraft von $F_0 = \rho \cdot A \cdot v_{ab,0}^2$ $[N]$, mit r $\left[kg/m^3\right]$ der Dichte das Wassers. Bei einer Umfangsgeschwindigkeit des Wasserrades von $u = \Omega \cdot R\,[m/s]$, mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega\,[1/s]$ und dem wirksamen Wasserrad-Radius $R\,[m]$, beträgt die Relativgeschwindigkeit $v_{rel}[m/s]$ des Wassers zum Rad $v_{rel} = v_{ab,0} - \Omega \cdot R$. Damit wirkt auf das rotierende Rad die Kraft $F = F_0 \cdot \left(1 - \Omega \cdot R / v_{ab,0}\right)^2$ $[N]$.

Faßt man die Anteile $i)$ und $ii)$ zusammen, so läßt sich die folgende ***Bewegungsgleichung*** aufstellen:

$$\boxed{F_{res} = \frac{M_{res}}{R} = \frac{\Theta}{R} \cdot \frac{d\omega}{d\tau} = F_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega \cdot R}{v_0}\right)^2 - F_W + F_{i)}} \tag{4}$$

mit dem Trägheitsmoment $\Theta = \int r^2 dm$, sowie $F_W = F_R + F_L$, $F_L = \frac{M_L}{R}$ als Widerstandskraft (Reibung + Last), $\tau \equiv Zeit$ $[s]$, $\omega \equiv Winkelgeschwindigkeit$ $[1/s]$.

Mit $$F_{eff} = F_R + F_L - F_{i)} = F_W - F_{i)} \Rightarrow \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{F_0 \cdot R}{\Theta} \cdot \left(1 - \frac{\omega \cdot R}{v_0}\right)^2 - \frac{F_{eff} \cdot R}{\Theta} \qquad (5)$$

Im ***stationären*** eingefahrenen Zustand gilt $d\omega = 0$, sowie $F_{res} = 0$. In diesem Fall gilt:

$$F_{eff} = F_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega \cdot R}{v_{ab,0}}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \Omega_{stat} = \frac{v_{ab,0}}{R} \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{F_{eff}}{F_0}}\right] \qquad (6)$$

Mit der Beziehung für die Leistung $P = M \cdot \Omega\,[Nm/s]$, sowie dem Drehmoment $M = F \cdot R\,[Nm]$, erhält man:

$$\boxed{P = F_W \cdot R \cdot \Omega = F_0 \cdot v_{ab,0} \cdot (1-x)^2 \cdot x + F_{i)} \cdot v_{ab,0} \cdot x} \qquad \text{mit} \quad x \equiv \frac{\Omega \cdot R}{v_{ab,0}}. \qquad (7)$$

Diese Leistung hat ein Maximum für: $$x = \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{F_{i)}}{3 \cdot F_0}}. \qquad (8)$$

Daraus läßt sich als ein ***wesentliches Resultat*** dieser Überlegungen eine Bedingung für die Größe von $F_{i)}$ und damit für den Massebelag $m_{i)}$ gewinnen:

$$\boxed{0 \le F_{i)} \le \frac{F_0}{3}}, \qquad \text{und} \qquad \boxed{0 \le m_{i)} \le \frac{\Phi \cdot \rho \cdot A \cdot v_{ab,0}^2}{3 \cdot g \cdot \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right)}}. \qquad (9)$$

Dies bedeutet zur optimalen Nutzung einen *dreifachen* Anteil bezüglich des Strömungsbeitrags. In Kombination mit Gleichung (6) für $F_{eff} = F_W - F_{i)}$ erhält man damit:

$$\frac{1}{3} \le \sqrt{\frac{F_{eff}}{F_0}} \le \frac{2}{3}, \quad \text{sowie} \quad \frac{F_W}{F_0} = \frac{2}{9} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{F_{i)}}{3 \cdot F_0}}. \qquad (10)$$

Für $F_{i)} = 0 \Rightarrow x = 1/3 \Rightarrow P_{\max} = \eta_{hyd} \cdot \eta_{mech} \cdot \frac{4}{27} \cdot \rho \cdot A \cdot v_{ab,0}^3$ wenn man die auftretenden hydraulischen h_{hyd} und mechanischen h_{mech} Verluste berücksichtigt (siehe /4/). Dies entspricht dem reinen unterschlächtigen Wasserrad. Setzt man dagegen $F_{i)} = F_0 / 3 \Rightarrow x = 2/3 \Rightarrow$

$$\boxed{P_{\max} = \eta_{hyd} \cdot \eta_{mech} \cdot \frac{8}{27} \cdot \rho \cdot A \cdot v_{ab,0}^3}. \qquad (11)$$

Somit ergibt sich eine *doppelt so große Leistung* wie für den reinen unterschlächtigen Fall.

Für die Ableitung eines Ausdrucks zur Abschätzung des Anlaufverhaltens muß die Bewegungsgleichung (5) integriert werden. Dies geschieht in völlig analoger Weise wie für das unterschlächtige Wasserrad, wie in /4/ bereits gezeigt. Aus der Bewegungsgleichung folgt:

$$\boxed{\Omega(t) = \frac{v_{ab,0}}{R} \cdot \left\{1 - \sqrt{\frac{F_{eff}}{F_0}} \cdot cth\left[\sqrt{\frac{F_{eff}}{F_0}} \cdot \frac{F_0 \cdot R^2}{v_{ab,0} \cdot \Theta} \cdot t + Arcth\left(\sqrt{\frac{F_0}{F_{eff}}}\right)\right]\right\}}. \qquad (12)$$

Wie man sieht, gilt dabei $\Omega(t=0)=0$ und $\Omega(t\to\infty)=\Omega_{stat}$. D.h. es dauert theoretisch unendlich lange, bis ein stationärer Zustand erreicht wird. Um ein Kriterium für die praktisch zu erwartende Zeit zu erhalten, betrachte die Anlaufzeit-Funktion als Umkehrung von (12):

$$\boxed{t=\frac{v_{ab,0}\cdot\Theta}{F_0\cdot R^2}\cdot\sqrt{\frac{F_0}{F_{eff}}}\cdot\left[Arcth\left(\sqrt{\frac{F_0}{F_{eff}}}\cdot\left(1-\frac{\Omega\cdot R}{v_{ab,0}}\right)\right)-Arcth\left(\sqrt{\frac{F_0}{F_{eff}}}\right)\right]}\,. \tag{13}$$

Zur Abschätzung der Hochlaufzeit nutze die Bedingung für eine maximale Leistung $P_{\max}$ $\sqrt{\frac{F_{eff}}{F_0}}=\frac{1}{3}$ und setze für die Frequenz $\Omega=0{,}9\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{v_{ab,0}}{R}=0{,}9\cdot\Omega_{P\max}$ d.h. 90% der Grenzfrequenz für $t\to\infty$. Damit erhält man ein Maß für die Anlaufzeit in Abhängigkeit von den Strömungsdaten und Konstruktionsfaktoren: $\boxed{t_{Anlauf}\left(90\%\,\Omega_{P\max}\right)\cong 2{,}56\cdot\frac{v_{ab,0}\cdot\Theta}{F_0\cdot R^2}}$ (14)

Diese Beziehung kann zur Abstimmung des zu konstruierenden mittelschlächtigen Wasserrades (R,Θ) auf die Strömungsverhältnisse $(v_{ab,0},F_0)$ genutzt werden.

Zusammenfassung und Ausblick:

Eine auch heute noch attraktive Möglichkeit zur dezentralen Stromversorgung stellt die Nutzung von Wasserkraft in Form von Wasserrädern dar, zum Beispiel im Rahmen eines regenerativen Hybridsystems. Die vorliegende Arbeit dient zur systematischen Erfassung der theoretischen Grundlagen, für deren Auslegung und Optimierung. Zur Ermittlung praktikabler Kriterien zur Abschätzung und gegenseitigen Abgrenzung der Einsatzbedingungen der verschiedenen Wasserrad-Typen werden weitere Untersuchungen durchgeführt.

Referenzen:

/1/ *Bau von Wasserkraftanlagen*
Felix von König; Verlag C.F. Müller Karlsruhe 1985

/2/ *Die Wasserräder*
Wilhelm Müller; Verlag Moritz Schäfer Detmold 1983, Reprint der Ausgabe von 1939

/3/ *Wasserkraftanlagen*
J. Giesecke, E. Mosonyi; Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage 1998

/4/ *Physikalische Analyse zur Bestimmung von Kriterien für die Auslegung und Optimierung von ober- und unterschlächtigen Wasserrädern*
K. Brinkmann; Zweites Anwenderforum Kleinwasserkraftwerke, 1999, Passau